Schockwellen

Seminar (Analysis): „Wellen“, Vortrag 5 • 20. November 2009 • Michael Partheil

Die Methode der Charakteristiken liefert Lösungen einer Kontinuitätsgleichung $u_t + \phi_x = 0$, aber nur solange sich die charakteristischen Linien nicht kreuzen. Dieser Vortrag zeigt, wie sich im Falle einer solchen Kreuzung dennoch eine (unstetige) Schockwellenlösung konstruieren lässt, die das zugrunde liegende Erhaltungsgesetz erfüllt.

1 Gradientenkatastrophe bei der Methode der Charakteristiken

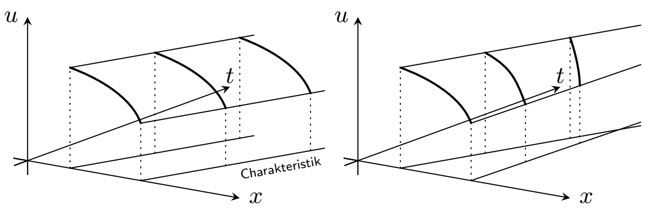
Betrachte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u_t + c(u)u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x) \end{aligned} \tag{AWP}$$

Wert der Lösung u ist konstant entlang der charakteristische Linien $x = c(u_0(x_0))t + x_0$ (Vortrag 4).

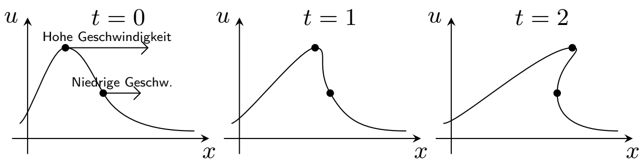
Problem: Wenn $c(u)$ nicht konstant, können sich Linien kreuzen, der Wert von u ist aber weiterhin konstant auf jeder Linie $\Rightarrow$ Steigung $u_x(x,t) \to \infty$ wenn t sich dem Zeitpunkt der Kreuzung nähert.

Parallele Charakteristiken Kreuzende Charakteristiken



Bildung einer solchen unendlich großen Steigung u_x in Lösung u heißt **Gradientenkatastrophe**.

Anschaulich:



2 Breaking Time

Frühester Zeitpunkt $t_b \geq 0$, zu dem Gradientenkatastrophe auftritt, wird **Breaking Time** genannt.

Bestimmung der Breaking Time: Finde frühsten Zeitpunkt t_b, bei dem u_x unendlich wird: Lösung von (AWP) im Punkt (x,t) ist $u(x,t) = u_0(x_0)$, wobei $x_0 = x_0(x,t)$ den Startpunkt $(x_0, 0)$ der char. Linie durch (x,t) bestimmt. Kettenregel:

$$u_x(x,t) = u_0'(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial x} \tag{*}$$

Damit:

$$\begin{aligned} &x = c(u_0(x_0))t + x_0 \\ \overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Rightarrow}\ &1 = t\frac{d}{dx_0}\left[c(u_0(x_0))\right]\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial x_0}{\partial x} \\ \Rightarrow\ &\frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{1 + t\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0))} \\ \overset{(*)}{\Rightarrow}\ &u_x(x,t) = \frac{u_0'(x_0)}{1 + t\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0))} \end{aligned}$$

Also gilt $u_x \to \infty \iff t\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0)) \to -1$.

Wenn $\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0)) \geq 0$ für alle Startpunkte $(x_0, 0)$, dann passiert das nie, da $t \geq 0$.

Andernfalls: Frühester Zeitpunkt ergibt sich für das x_0 welches $\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0))$ am negativsten macht, mit diesem x_0 ist Breaking Time:

$$t_b = \frac{-1}{\frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0))} \tag{BT}$$

Beispiel: Unviskose Burger-Gleichung

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x) = e^{-x^2} \end{aligned}$$

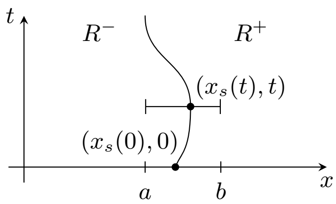
Also in (AWP): $c(u) = u$. Minimum von $x_0 \mapsto \frac{d}{dx_0}c(u_0(x_0)) = \frac{d}{dx_0}e^{-x_0^2} = -2x_0e^{-x_0^2}$ liegt bei $x_0 = 1/\sqrt{2}$. Breaking Time ist damit nach (BT):

$$t_b = \frac{-1}{-2x_0e^{-x_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-1/2}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 1{,}17$$

3 Schockwellenlösungen der Kontinuitätsgleichung

Konstruktion einer Lsg. von $u_t + \phi_x = 0$ mit Methode der Charakteristiken stoppt bei Gradientenkatastrophe, aber modellierter physikalischer Prozess läuft dennoch weiter. Idee: Herleitung von $u_t + \phi_x = 0$ (Vortrag 4) verlangte Glattheit von Lsg. u, erlaube also nun unstetige Lösungen, die dennoch zugrundeliegendes Erhaltungsgesetz erfüllen.

Zerlege Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ von $u(x,t)$ mit Kurve $t \mapsto (x_s(t), t)$ in linken und rechten Bereich R^- bzw. R^+:



a und b werden später noch benötigt

$u(x,t)$ heißt **stückweise glatte Lösung** von $u_t + \phi_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x)$ mit **Sprungstelle** entlang x_s, wenn

- $u(x,t)$ hat stetige erste Ableitungen in R^+ und R^- und erfüllt $u_t + \phi_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x)$ in beiden Bereichen
- Für jeden Punkt (x_0,t_0) auf Kurve $(x_s(t),t)$ existieren Limiten von $u(x,t)$ wenn $(x,t) \to (x_0,t_0)$ in R^- und wenn $(x,t) \to (x_0,t_0)$ in R^+, aber sind nicht notwendigerweise gleich

Wähle nun $x_s(t)$ so, dass u die Integralform der Kontinuitätsgleichung (IF) (mit $f = 0$) erfüllt: Sei $(x_s(t),t)$ fest, a, b beliebig mit $a < x_x(t) < b$. Dann:

$$\begin{aligned}
\phi(a,t) - \phi(b,t) &\overset{(IF)}{=} \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx \\
=&\frac{d}{dt}\left(\int_a^{x_s(t)^-} u(x,t)dx + \int_{x_s(t)^+}^b u(x,t)dx\right) \\
=&\int_a^{x_s(t)^-} u_t(x,t)dx + u(x_s^-,t)\frac{dx_s}{dt} \\
&+ \int_{x_s(t)^+}^b u_t(x,t)dx - u(x_s^+,t)\frac{dx_s}{dt}
\end{aligned}$$

Mit $a \to x_s^-$ und $b \to x_s^+$ folgt

$$\phi(x_s^-,t) - \phi(x_s^+,t) = u(x_s^-,t)\frac{dx_s}{dt} - u(x_s^+,t)\frac{dx_s}{dt}$$

Damit erhält man ODE für x_s, die **Rankine-Hugoniot Bedingung**:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\phi(x_s^+,t) - \phi(x_s^-,t)}{u(x_s^+,t) - u(x_s^-,t)} = \frac{[\phi]}{[u]} \tag{RH}$$

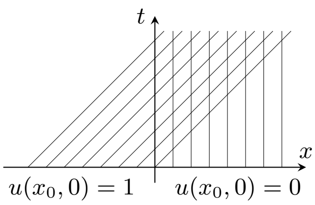
wobei

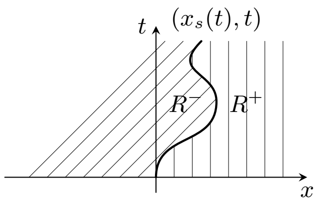
$$\begin{aligned}
&[\phi](x,t) := \phi(x^+,t) - \phi(x^-,t), \\
&[u](x,t) := u(x^+,t) - u(x^-,t)
\end{aligned}$$

Eine stückweise glatte Lösung $u(x,t)$ von $u_t + \phi_x = 0$ mit Sprungstelle entlang x_s, die (RH) erfüllt, heißt **Schockwellenlösung** der Kontinuitätsgleichung; $x_s(t)$ heißt **Schockpfad**.

Beispiel: Unviskose Burger-Gleichung

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \le 0 \\ 0 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$





Lösung ist also $u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (x,t) \in R^- \\ 0 & \text{wenn } (x,t) \in R^+ \end{cases}$.

Schockpfad x_s muss (RH) erfüllen:

$$\frac{dx_s}{dt} \overset{(RH)}{=} \frac{[\frac{1}{2}u^2]}{[u]} = \frac{\frac{1}{2}(u^+)^2 - \frac{1}{2}(u^-)^2}{u^+ - u^-} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2}$$

Mit Anfangsbedingung $x_s(0) = 0$ folgt $x_s(t) = \frac{t}{2}$. Also:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{wenn } x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$

4 Beispiel: Verkehr an roter Ampel

Verkehr auf einer Einbahnstraße (ohne Kreuzungen etc.) trifft auf Ende einer Schlange, die sich hinter roter Ampel gebildet hat. Fahrzeugdichte in Schlange: u_1 (Autos pro km), Dichte der Fahrzeuge bei freier Fahrt: u_0; insb. $0 < u_0 < u_1$.

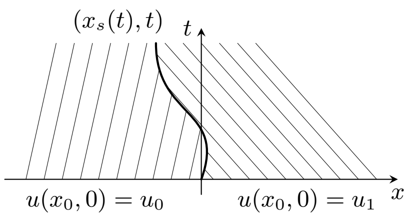
Lineares Verkehrsflussmodell aus Vortrag 4: $u(x,t)$ sei Fahrzeugdichte an Stelle x zur Zeit t, Verkehrsgeschwindigkeit gegeben durch $v = v_1\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)$ wobei v_1 die maximale Geschwindigkeit bezeichnet. Es ergibt sich $\phi = uv = v_1\left(u - \frac{u^2}{u_1}\right)$.

Ende der Schlange beginne bei $x = 0$ zur Zeit $t = 0$. Dann muss $u(x,t)$ folgendes Anfangswertproblem erfüllen:

$$\begin{aligned}
&u_t + v_1\left(1 - \frac{2u}{u_1}\right)u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\
&u(x,0) = \begin{cases} u_0 & \text{wenn } x < 0 \\ u_1 & \text{wenn } x \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Problem ist von der Form (AWP) mit $c(u) = v_1\left(1 - \frac{2u}{u_1}\right)$, charakteristische Linie beginnend bei $(x_0,0)$ ist gegeben durch

$$x = \begin{cases} c(u_1)t + x_0 = -v_1 t + x_0 & \text{wenn } x_0 \ge 0 \\ c(u_0)t + x_0 = v_1\left(1 - \frac{2u_0}{u_1}\right)t + x_0 & \text{wenn } x_0 < 0 \end{cases}$$



Lsg. ist von der Form $u(x,t) = \begin{cases} u_0 & \text{wenn } x < x_s(t) \\ u_1 & \text{wenn } x > x_s(t) \end{cases}$.

(RH) für $x_s(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_s}{dt} &= \frac{\phi(u^+) - \phi(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{\phi(u_1) - \phi(u_0)}{u_1 - u_0} \\
&= \frac{0 - v_1\left(u_0 - \frac{u_0^2}{u_1}\right)}{u_1 - u_0} = -v_1\frac{u_0}{u_1}
\end{aligned}$$

Mit $x_s(0) = 0$ folgt $x_s(t) = -v_1\frac{u_0}{u_1}t$ und damit als Schockwellenlösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 & \text{wenn } x < -v_1\frac{u_0}{u_1}t \\ u_1 & \text{wenn } x \ge -v_1\frac{u_0}{u_1}t \end{cases}$$